

## Hanta Virüs Modelinden Elde Edilen Fisher-Kolmogorov Denkleminin Lie Simetri Analizi

Mehmet KOCABIYIK<sup>\*1</sup>, Mevlüde YAKIT ONGUN<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 32260, Isparta

<sup>2</sup>Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 32260, Isparta

(Alınış / Received: 20.01.2017, Kabul / Accepted: 19.09.2017, Online Yayınlanma / Published Online: 27.10.2017)

### Anahtar Kelimeler

Hanta virüs model,  
Fisher-Kolmogorov denklemi,  
Reaksiyon-difüzyon denklemi,  
Lie simetri metodu.

**Özet:** Bu makalede, kısmi diferansiyel denklem kullanılarak modellenen bir epidemik model çalışılmıştır. Hanta virüs modeli de denilen bu modelde tüm fare popülasyonu  $M_s$  ve  $M_i$  olarak iki sınıfa ayrılmıştır.  $M = M_s + M_i$  şeklinde toplam fare popülasyonunu veren, Fisher-Kolmogorov kısmi diferansiyel denkleminin genel çözümü için Lie simetri analizinden faydalanılmıştır.

## Lie Symmetry Analysis of Fisher-Kolmogorov Equations Obtained from Hanta-Virus Model

### Keywords

Hanta virus model,  
Fisher-Kolmogorov equation,  
Reaction-diffusion equation,  
Lie symmetry method.

**Abstract:** In this paper, we studied on a epidemic model which modeled by using partial differential equation. In this model which called as Hanta virus model, all mice populations categorized in two groups as  $M_s$  and  $M_i$ . It is been used Lie symmetry analysis for the general solution of the Fisher-Kolmogorov partial differential equation which give us totally mice population as  $M = M_s + M_i$ .

### 1. Giriş

Hanta virüsü, farelerden bulaşan tek sarmallı bir RNA virüsüdür. İlk olarak bu virüs 1976 yılında Kore'de izole edilmiş ve Seul virüsü olarak da adlandırılmıştır. Bu virüs hakkında daha detaylı bilgi edinmek ve aynı zamanda virüsü analiz etmek amacıyla bu makalede de kullanacağımız kısmi türevli Hanta virüs modeli, [1] ve [2] de verilen Abramson ve Kenkre çalışmalarından sonra önerilmiş ve bu tarihten itibaren Abramson ve Kenkre modeli olarak da kullanılmıştır.

[3]'de incelenecek olan modelin adi mertebeden diferansiyel denklemler ile verilen durumu, [4]'de Hanta virüs modelinin nümerik çözümleri ile ilgili analizler, [5]'de erkek kemirgenlerdeki Hanta virüs enfeksiyonu için iki yeni model, [6]'da ise Hanta virüs modeli için kesirli mertebeden çalışmalar ortaya konmuştur. [7]'de virüsün tarihsel gelişimi ile ilgili çalışmalar yer almıştır. [8]'de ise Hanta virüs modelinden elde edilen Lojistik diferansiyel denklemin nümerik çözümleri için standart olmayan sonlu fark metodunu kullanmıştır. Bu makalede çalışılacak olan Abramson ve Kenkre modelinde tüm fare popülasyonu susceptible (hasta olmayan) ve infected (hastalıklı) olmak üzere ikiye ayrılmış ve bu

ifadeler sırasıyla  $M_s$  ve  $M_i$  ile sistemde ifade edilmiştir.

Aynı zamanda toplam fare popülasyonu da  $M = M_s + M_i$  toplamı ile ifade edilmiştir. Kısmi diferansiyel denklem sistemi olarak modellenen Abramson ve Kenkre modeli de denen Hanta virüs modeli

$$\frac{\partial M_s}{\partial t} = \frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2} + bM - cM_s - \frac{M_s M}{K} - aM_s M_i \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 M_i}{\partial x^2} - cM_i - \frac{M_i M}{K} + aM_s M_i \quad (2)$$

şeklinde dir. Burada  $K$  probleme ait çevre taşıma kapasitesini,  $a$  bulaşma oranını,  $b$  doğum oranını ve  $c$  ise ölüm oranını simgelemektedir. Denklem 1 ve 2 taraf tarafa toplanması ile Fisher tipi Lojistik diferansiyel denklem,

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + (b - c)M \left[ 1 - \frac{M}{(b-c)K} \right] \quad (3)$$

şeklinde elde edilir.

Makalenin sonraki aşamalarında, elde edilen bu Lojistik diferansiyel denklemin çözümünün Lie simetri metodu ile yapılması amaçlanmaktadır. Makale şu şekilde organize edilmiştir. İkinci bölümde, ilk olarak Lie simetri dönüşümleri ile ilgili bazı temel tanımlar ve sonrasında ise birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler ve kısmi mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde Lie simetri metodunun kullanılmasıyla ilgili bilgilere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise sistemden elde edilen Lojistik diferansiyel denklemin Lie metodu ile çözümleri araştırılmış ve son olarak da çözümlere ait bazı grafik ve simülasyonlara yer verilmiştir. Son bölümde ise tartışma ve sonuçlar ile makale sonlandırılmıştır.

## 2. Temel Kavram ve Tanımlar

### 2.1. Bir parametrelili Lie grupları

Konu ile ilgili daha detaylı çalışmalar için [9-13] kaynaklarına bakılabilir.

Her  $\mu \in \mathbb{R}$  için,

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \times \mu \rightarrow \mathbb{R}, \psi: \mathbb{R}^2 \times \mu \rightarrow \mathbb{R} \quad (4)$$

fonksiyonları,  $\mu$  parametresi ve  $x, y$  değişkenlerine sahip iki analitik fonksiyon olsun.

$$\Phi(x, y, \mu) = x_1, \psi(x, y, \mu) = y_1 \quad (5)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ ve} \\ (x, y) &\rightarrow T(x, y) = (\Phi(x, y, \mu), \psi(x, y, \mu)) \\ &= (x_1, y_1) \end{aligned} \quad (6)$$

dönüşümü yapılarak,  $G = [T \mid \mu \in \mathbb{R}]$  kümesi tanımlansın. Eğer bu küme üzerinde bir ikili işlem  $\Gamma: G \times G \rightarrow G$  ile grup aksiyomlarını sağlıyorsa, *bir parametrelili Lie grubu* adını alır.

Lie grubu tanımındaki  $\Phi$  ve  $\psi$  fonksiyonlarını  $\mu = 0$  civarında Taylor serisine açılırsa,

$$\xi(x, y) = \left( \frac{\partial x_1}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} \quad (7)$$

$$\eta(x, y) = \left( \frac{\partial y_1}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} \quad (8)$$

şeklindeki  $\xi(x, y)$  ve  $\eta(x, y)$  fonksiyonlarının da yardımı ile

$$x_1 = x + \mu \xi(x, y) + O(\mu^2) \quad (9)$$

$$y_1 = y + \mu \eta(x, y) + O(\mu^2) \quad (10)$$

olarak bulunur. Bu ifadeye de *Lie grubunun sonsuz küçük dönüşümü* adı verilir. Bulunan bu dönüşüm

altında düzgün bir fonksiyon değişiminin gözlemlenmesi için Lie operatörü adı verilen  $L$  diferansiyel operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$L = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (11)$$

### 2.2. Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin Lie simetri dönüşümü ile çözülmesi

Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin Lie simetri ile çözümü hakkında çalışmalar [10,11,14-16] daki çalışmalarda yapılmış olup bu bölümde de bu kaynaklardan faydalanılmıştır.

$y' = f(x, y)$  şeklinde verilen genel birinci mertebeden bir adi diferansiyel denklemini alalım. Tanımlanan  $T$  dönüşümü bu denklem için bir simetri dönüşümü ise bu durumda adi diferansiyel denklem için simetri şartı,

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{D_x y_1}{D_x x_1} = \frac{y_{1x} + y' y_{1y}}{x_{1x} + y' x_{1y}} \quad (12)$$

olarak elde edilir.

Burada  $D_x$  total türev operatörü olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} y' + \frac{\partial}{\partial y'} y'' + \dots \quad (13)$$

Lie grubu etkisi ile bulunan  $x_1$  ve  $y_1$  için Taylor seri açılımlarının simetri şartı altında yerine yazılmasıyla, birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için lineerleştirilmiş simetri şartı aşağıdaki gibi bulunmuş olur.

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x) f - \xi_y f^2 = \xi f_x + \eta f_y \quad (14)$$

Buradan elde edilen  $\xi$  ve  $\eta$  tanjant vektörleri ile adi diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki verilen yöntemle kolayca bulunabilir. Ancak burada çözüme ulaşabilmek için  $(r, s) = (r(x, y), s(x, y))$  şeklinde tanımlanan kanonik koordinat kullanılmalıdır. Bu  $(r, s)$  kanonik koordinatı aşağıdaki gibi hesaplanır.

*i)* Eğer  $\xi \neq 0$  ise  $r$  nin

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)} \quad (15)$$

diferansiyel denkleminin bir integrali olduğu ele alınır ve bu denklemin çözümünün  $\theta(x, y)$  olarak bulunduğu düşünülürse,  $r = \theta(x, y)$  ve  $s = \int \frac{dx}{\xi(x, y, r)}$  olarak  $r$  ve  $s$  çözümleri elde edilir.

*ii)* Eğer  $\xi = 0$  ise  $r$  ve  $s$  nin çözümleri  $r = x$  ve  $s = \int \frac{dy}{\eta(r, y)}$  şeklinde bulunur.

Daha sonra bulunan bu kanonik koordinatlar yardımıyla verilen adi diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$\frac{ds}{dr} = \varphi(r) \quad (16)$$

olmak üzere, bu çözüm aşağıda verilen integralin çözülmesiyle elde edilir

$$s(x, y) = \int \varphi(r) dr + c \quad (17)$$

Burada  $c$  keyfi sabittir.

### 2.3. Kısmi diferansiyel denklemlerin Lie simetri dönüşümü ile çözülmesi

$n$ . mertebeden genel kısmi diferansiyel denklemi

$$F(t, x, u, u_x, u_t, \dots) = 0 \quad (18)$$

formunda ele alırsak, bu denkleme ait bir parametrelili Lie grup dönüşümü,

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + \mu \delta(t, x, u) \\ \bar{x} &= x + \mu \xi(t, x, u) \\ \bar{u} &= u + \mu \eta(t, x, u) \\ \bar{u}_i &= u_i + \mu \eta_i(t, x, u, u_1) \\ &\dots \end{aligned} \quad (19)$$

$$\overline{u_{i,j,\dots,k}} = u_{i,j,\dots,k} + \mu \eta_{i,j,\dots,k}(t, x, u, u_1, \dots, u_k)$$

şeklindedir. Burada  $\mu$  önceki bölümde tanımlandığı gibi grup parametresidir. Elde edilen bu dönüşüme karşılık gelen Lie diferansiyel operatörü,

$$L = \delta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (20)$$

şeklinde ifade edilir.

Bu operatördeki tanjant vektörleri

$$\left( \frac{\partial \bar{t}}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} = \delta(t, x, u), \quad (21)$$

$$\left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} = \xi(t, x, u), \quad (22)$$

$$\left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \mu} \right)_{\mu=0} = \eta(t, x, u) \quad (23)$$

şeklinde tanımlanabilir. Lie operatörü yardımıyla,

$$\begin{aligned} L^n &= L + \eta_i(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u_i} \\ &+ \eta_{i,j,\dots,k}(t, x, u, u_1, \dots, u_k) \frac{\partial}{\partial u_{i,j,\dots,k}} \end{aligned} \quad (24)$$

olarak elde edilir. Burada kullanılacak sonsuz küçük üreteçler önceki bölümde tanımlanan  $D$  total türev operatörü yardımıyla,

$$\eta_i = D_i \eta - (D_i \delta) u_t - (D_i \xi) u_x \quad (25)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada birkaç ifadenin yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= D_t(\eta) - u_t D_t(\delta) - u_x D_t(\xi) \\ &= \eta_t + (\eta_u - \delta_t) u_t - \xi_t u_x - \delta_u (u_t)^2 - \xi_u u_t u_x \\ \eta_{22} &= D_x(\eta) - u_t D_x(\delta) - u_x D_x(\xi) \\ &= \eta_x + (\eta_u - \delta_x) u_x - \delta_x u_t - \xi_u (u_x)^2 \\ &\quad - \delta_u u_t u_x \\ \eta_{111} &= D_t(\eta_{11}) - u_{tt} D_t(\delta) - u_{tx} D_t(\xi) \\ &= \eta_{tt} + (2\eta_{tu} - \delta_{tt}) u_t + (\eta_{uu} - 2\delta_{tu}) (u_t)^2 \\ &\quad - \delta_{uu} (u_t)^3 - 3\delta_u u_t u_{tt} \\ &\quad - \xi_{tt} u_x - 2\xi_{ut} u_t u_x - 2\xi_t u_{tx} \\ &\quad - \xi_{uu} u_x (u_t)^2 - \xi_u u_x u_{tt} \\ &\quad - 2\xi_u u_t u_{xt} \\ \eta_{222} &= D_x(\eta_{22}) - u_{tx} D_x(\delta) - u_{xx} D_x(\xi) \\ &= \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \delta_{xx} u_t \\ &\quad + (\eta_u - 2\xi_x) u_{xx} - 2\delta_x u_{tx} \\ &\quad + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu}) (u_x)^2 \\ &\quad - 2\delta_{xu} u_t u_x - \xi_{uu} (u_x)^3 \\ &\quad - \delta_{uu} u_t (u_x)^2 - 3\xi_u u_x u_{xx} \\ &\quad - \delta_u u_t u_{xx} - 2\delta_u u_x u_{tx} \end{aligned} \quad (26)$$

şeklinde çözüm için gerekli ifadeler bulunur.

Örneğin  $u_t = u_{xx}$  denklemi için ikinci mertebeden genişletilmiş Lie operatörü  $L$  ile  $\eta_1 = \eta_{22}$  eşitliği elde edilip, çözüm için simetriler bulunur.

#### 2.3.1 Grup indirgeme

$\delta, \xi$  ve  $\eta$  yardımıyla bir kısmi diferansiyel denklemi simetri çözümü yardımı ile bir adi diferansiyel denkleme aşağıdaki gibi indirgeyebiliriz.

$$\frac{dt}{\delta(t, x, u)} = \frac{dx}{\xi(t, x, u)} = \frac{du}{\eta(t, x, u)} \quad (27)$$

Bu sistemden elde edilen iki integralin çözülmesiyle elde edilen ifadeleri  $v$  ve  $z$  olarak adlandırsak indirgeme işlemi için  $w(z) = v$  alınır. Bu ifadenin verilen kısmi diferansiyel denklemde yerine yazılmasıyla denklem adi diferansiyel denkleme indirgenir ve sonrasında bu adi diferansiyel denklemin  $w$  çözümünü kısmi diferansiyel denklemin çözümü olarak elde edilir.

Bu bölüm hakkında daha detaylı bilgi için [17-19] ile verilen kaynaklara bakılabilir.

### 3. Kısmi Mertebeden Hanta Virüs Denklem Sisteminin Lie Simetri Metodu ile Çözümünün Araştırılması

Denklem 1 ve 2'nin taraf tarafa toplanması ve  $M = M_s + M_i$  ifadesinin kullanılması ile Denklem 1 ve 2 sistemi Denklem 3 ile ifade edilen,

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + (b - c)M \left[ 1 - \frac{M}{(b-c)K} \right] \quad (28)$$

şeklindeki Fisher tipi Lojistik diferansiyel denklem halini alır.

Kolaylık açısından bu denklemi,

$$u_t = u_{xx} + A \cdot u - B \cdot u^2 \quad (29)$$

olarak ifade edelim. Burada

$A = (b - c)$  ve  $B = \frac{1}{K}$  şeklinde alınmış ve  $M$  ifadesi ise  $u$  ile gösterilmiştir. Bu denklem  $u_t = u_{xx} + f(u)$  şeklinde daha genel olarak ifade edilebilir.

Yukarıda verilen ikinci mertebeden genişletilmiş Lie operatörü olan  $L$  nin kullanılmasıyla elde edilen Fisher denkleminin Lie simetri çözümü için

$$-\eta f_u + \eta_1 - \eta_{22} = 0 \quad (30)$$

ifadesinin çözülmesi gereklidir.  $\eta_1$  ve  $\eta_{22}$  tanımlarının yerine yazılmasıyla bu eşitlik,

$$\begin{aligned} & -\eta f_u + \eta_t + (\eta_u - \delta_t)u_t - \xi_t u_x - \delta_u u_t^2 \\ & - \xi_u u_t u_x - \eta_{xx} + (-2\eta_{xu} + \xi_{xx})u_x + \delta_{xx} u_t + \\ & (-\eta_u + 2\xi_x)u_{xx} + 2\delta_x u_{tx} + (-\eta_{uu} + 2\xi_{xu})u_x^2 \\ & + 2\delta_{xu} u_t u_x + \xi_{uu} u_x^3 + \delta_{uu} u_x^2 u_t + 3\xi_u u_x u_{xx} \\ & + \delta_u u_t u_{xx} + 2\delta_u u_x u_{tx} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

şeklini alır. Yukarıda verilen  $u_t = u_{xx} + f(u)$  ifadesi ile  $u_{xx}$  yerine  $u_t - f(u)$  yazılmasıyla kısmi diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} & [-\eta f_u - (-\eta_u + 2\xi_x)f(u) + \eta_t - \eta_{xx}] + \\ & [\eta_u - \delta_t + \delta_{xx} + (-\eta_u + 2\xi_x) - \delta_u f(u)]u_t \\ & + [-\delta_u + \delta_u]u_t^2 + [-\xi_u + 2\delta_{xu} + 3\xi_u]u_t u_x \\ & + [-\xi_t - 2\eta_{xu} + \xi_{xx} - 3\xi_u f(u)]u_x + [\xi_{uu}]u_x^3 \\ & + [-\eta_{uu} + 2\xi_{xu}]u_x^2 + [\delta_x]u_{tx} + [\delta_u]u_x u_{tx} \\ & + [\delta_{uu}]u_x^2 u_t = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

halini alır.

$u$ 'ya göre bütün mertebeden türevlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle aşağıdaki sistem elde edilir.

$$\begin{aligned} sbt: & -\eta f_u - (-\eta_u + 2\xi_x)f(u) + \eta_t - \eta_{xx} = 0 \\ u_t: & \eta_u - \delta_t + \delta_{xx} + (-\eta_u + 2\xi_x) - \delta_u f(u) = 0 \\ u_t^2: & -\delta_u + \delta_u = 0 \\ u_t u_x: & -\xi_u + 2\delta_{xu} + 3\xi_u = 0 \\ u_x: & -\xi_t - 2\eta_{xu} + \xi_{xx} - 3\xi_u f(u) = 0 \\ u_x^2: & -\eta_{uu} + 2\xi_{xu} = 0 \\ u_x^3: & \xi_{uu} = 0 \\ u_{tx}: & \delta_x = 0 \\ u_x u_{tx}: & \delta_u = 0 \\ u_x^2 u_t: & \delta_{uu} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Buradan ifadelerin çözülmesiyle,

$$\delta = C_1, \xi = e, \eta = 0 \quad (34)$$

elde edilir.  $C_1$  ve  $e$  keyfi sabitlerdir.

$L$  diferansiyel operatörü ile elde edilen simetriler,

$$L = \delta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (35)$$

ifadesi yardımı ile  $L_1 = \frac{\partial}{\partial t}$  ve  $L_2 = \frac{\partial}{\partial x}$  olarak bulunur. Burada  $C_1 = 1$  alınırsa grup indirgeme yardımıyla kısmi diferansiyel denklemin çözümü için,

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{e} = \frac{du}{0} \quad (36)$$

ifadesinin çözülmesi gerekir.  $z = x - et$  olmak üzere iki integral çözümü ile  $w(z) = u$  şeklinde ifadelerin  $u$  çözümü bulunur. Burada  $w$  keyfi bir fonksiyondur.

Elde edilen  $w$  çözümünün Lojistik denklemde yerine yazılmasıyla kısmi diferansiyel denklem

$$w'' + ew' + Aw - Bw^2 = 0 \quad (37)$$

şeklinde adi diferansiyel denkleme indirgenmiş olur. Burada Fisher tipi diferansiyel denkleminin çözümü hakkında çalışmalar için [17-20] kaynaklarına bakılabilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü oldukça zordur. [21]'de bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$M(x, t) = \frac{A}{4B} [1 \pm \tanh(d(x - et))]^2 \quad (38)$$

şeklinde elde edilir ki burada  $e$  ve  $d$  keyfi sabitlerdir ve çözüm için  $e = \pm 5 \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{6}}$  ve  $d = \pm \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{24}}$  olarak seçilmiştir.

Özel olarak  $A = B$  alınırsa elde edilecek diferansiyel denklem  $\alpha = A = B$  olmak üzere;

$$w'' + ew' + \alpha w(1 - w) = 0 \quad (39)$$

şeklinde elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü oldukça zordur, ancak [19] ve [20]'deki çalışmalar sonucunda  $e = -5 \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{6}}$  seçilmesi ve  $c_1$  keyfi sabit olmak üzere genel çözüm

$$\begin{aligned} M(x, t) = & \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \tanh \left( -c_1 + \frac{1}{12} \sqrt{6\alpha}(x - et) \right) \\ & + \frac{1}{4} \tanh \left( c_1 + \frac{1}{12} \sqrt{6\alpha}(x - et) \right)^2 \end{aligned} \quad (40)$$

olarak elde edilir.

Denklem 3'de  $a = 0.1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0.5$ ,  $K = 20$  olarak seçilirse, bu durumda  $A = b - c = 0.5$  ve  $B = 1/20$  olarak elde edilir [2]. Genel çözüm için ise,  $e = 5 \frac{\sqrt{0.5}}{\sqrt{6}}$  ve  $d = \frac{\sqrt{0.5}}{\sqrt{24}}$  değerleri bulunur. Bu koşullar altında Denklem 3'ün çözümü,

$$M(x, t) = \frac{0.5}{4/20} [1 \pm \tanh(\frac{\sqrt{0.5}}{\sqrt{24}} (x - 5 \frac{\sqrt{0.5}}{\sqrt{6}} t))]^2 \quad (41)$$

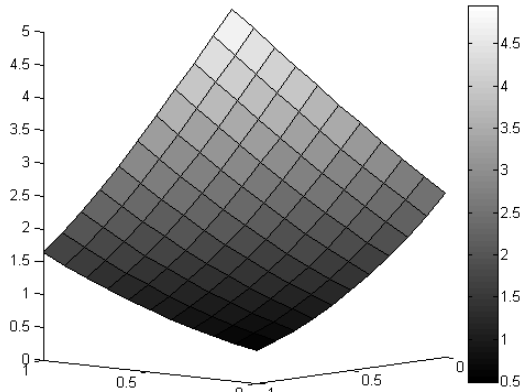
olarak elde edilir bu çözüm düzenlenirse,

$$M(x, t) = \frac{5}{2} [1 \pm \tanh(\frac{1}{4\sqrt{3}} (x - 5 \frac{1}{2\sqrt{3}} t))]^2 \quad (42)$$

olur. Ancak burada Abramson ve Kenkre modeline göre çevresel parametrenin bir kritik değeri vardır ve bu değer  $K_c = \frac{b}{a(b-c)}$  ile ifade edilip,  $M_s$  ve  $M_i$  popülasyonlarını birbirinden ayırır. Bu sebeple  $K$  nın seçimi daha fazla önem kazanır. Eğer  $K < K_c$  seçilirse,  $M_i$  popülasyonu sıfıra eğilim gösterir ve enfeksiyon yok olur. Diğer yandan  $K > K_c$  seçiminde ise yenilebilir kaynaklarda bir artış olduğu için enfeksiyon gelişir [22]. Bu sebeple verilen

$a, b$  ve  $c$  sabitleri için  $K_c = \frac{b}{a(b-c)} = 20$  olarak elde edildiğinden  $K$  çevre taşıma kapasitesinin bu değere eşit, daha büyük ve daha küçük üç değeri için çözümler araştırılmış ve bu durumlarda toplam popülasyona ait grafikler verilmiştir.

Analitik çözüme ait bazı grafik ve simülasyonlar aşağıdaki gibidir.



Şekil 1.  $K=20$  için Fisher-Kolmogorov denkleminin çözüm grafiği

Eğer  $K = 40$  seçilirse bu durumda denkleme ait çözüm,

$$M(x, t) = \frac{0.5}{4/40} [1 \pm \tanh(\frac{\sqrt{0.5}}{\sqrt{24}} (x - 5 \frac{\sqrt{0.5}}{\sqrt{6}} t))]^2 \quad (43)$$

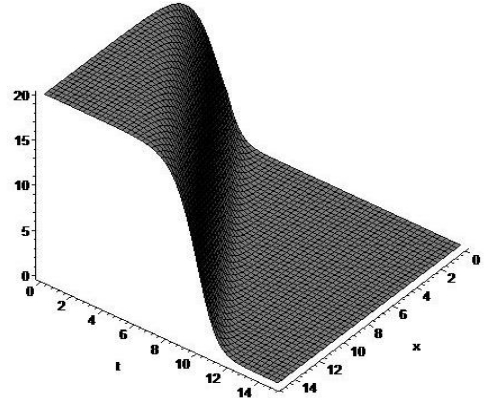
olur gerekli düzenlemeler ile bu çözüm,

$$M(x, t) = 5 [1 \pm \tanh(\frac{1}{4\sqrt{3}} (x - 5 \frac{1}{2\sqrt{3}} t))]^2 \quad (44)$$

halini alır.  $K = 40$  için çözüme ait grafik ise Şekil 2' de verilmiştir.

Eğer  $A=B$  olması için  $K = 2$  olarak seçilirse bu durumda analitik çözüm,

$$M(x, t) = \frac{0.5}{4/2} [1 \pm \tanh(\frac{\sqrt{0.5}}{\sqrt{24}} (x - 5 \frac{\sqrt{0.5}}{\sqrt{6}} t))]^2 \quad (45)$$



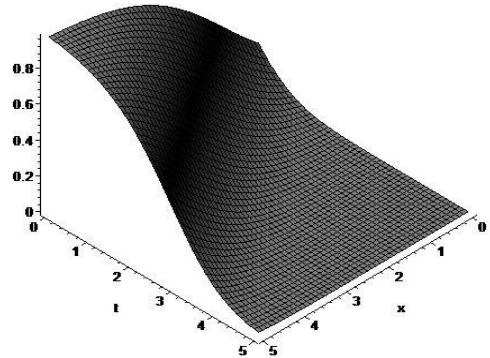
Şekil 2.  $K=40$  için Fisher-Kolmogorov denkleminin çözüm grafiği

halini alır ve bazı düzenlemelerle

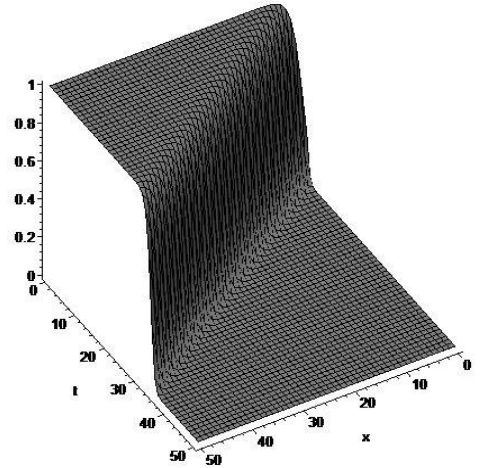
$$M(x, t) = 1/4 [1 \pm \tanh(\frac{1}{4\sqrt{3}} (x - 5 \frac{1}{2\sqrt{3}} t))]^2 \quad (46)$$

şeklinde çözüm elde edilir.

Bu çözüme ait grafik ise aşağıdaki gibidir.



Şekil 3. Özel durum,  $K=2$  için Fisher-Kolmogorov denkleminin çözüm grafiği



Şekil 4.  $K=2$  için Fisher-Kolmogorov denkleminin farklı aralıkta çözüm grafiği

#### 4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, Hanta virüs modeli olarak verilen doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklem sisteminin genel çözümü için Lie simetri metodundan yararlanılmıştır.

Toplam fare popülasyonunun Fisher-Kolmogorov denklemi olarak elde edilmesinden sonra, bu denklemin çözümü için Lie simetrilerinin bulunmasındaki güçlük sebebi ile bazı sabit değerlerin özel seçimleri ile çözümlere ait grafikler Şekil 1-4 ile verilmiştir.

### Teşekkür

Bu çalışmada yazarlar SDÜ-BAP 4738-YL1-16 numaralı proje ile Süleyman Demirel Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimine ve yazarlardan Mehmet KOCABIYIK, 2211 TÜBİTAK Yurt içi Lisansüstü Burs Programına (2228-A) teşekkür eder.

### Kaynakça

- [1] Abramson, G., and Kenkre, V. M. 2002. Spatiotemporal Patterns in the Hantavirus Infection. *Physical Review E*, 66.1, 011912.
- [2] Abramson, G., Kenkre, V. M., Yates, T. L., Parmenter, R. R. 2003. Traveling Waves of Infection in the Hantavirus Epidemics. *Bulletin of mathematical biology*, 65(3), 519-534.
- [3] Allen, L. JS., Michel, L., and Carleton J. P. 2003. The Dynamics of Two Viral Infections in a Single Host Population with Applications to Hantavirus. *Mathematical biosciences* 186.2, 191-21.
- [4] Chen, M., Clemence, D. P. 2006. Analysis of and Numerical Schemes for a Mouse Population Model in Hantavirus Epidemics. *Journal of Difference Equations and Applications*, 12(9), 887-899.
- [5] Allen, L. JS., Robert K. M., Colleen B. J. 2006. Mathematical Models for Hantavirus Infection in Rodents. *Bulletin of mathematical biology* 68.3, 511-524.
- [6] Rida, S. Z., El Radi, A. A., Arafa, A., Khalil, M. 2012. The Effect of the Environmental Parameter on the Hantavirus Infection through a Fractional-order SI model. *International Journal of Basic and Applied Sciences*, 1(2), 88-99.
- [7] Ruan, S., Jianhong W. 2009. Modeling spatial Spread of Communicable Diseases Involving Animal Hosts. *Spatial ecology*, 293-316.
- [8] Karadem, Z.G., Ongun, M.Y.. 2016. Logistic Differential Equation Obtained from Hanta-virus Model. *Suleyman Demirel University Journal of Science (e-Journal)*, 11(1), 82-91.
- [9] Bluman G.W., Kumei S. 1989. *Symmetries and Differential Equations*. New York, Springer-Verlag.
- [10] Cohen, A., 1911. *An Inroduction To The Lie Theory Of One-Parameter Groups With Applications To The Solutions Of Differential Equations*. D.C. Heath Co., Publishers, Boston, New York, Chicago.
- [11] Ibragimov, N. H. 2001. *Selected Works*. Vol. 1, 2. Karlskrona, Sweden: Alga Publications, Blekinge Institute of Technology.
- [12] Oliver, P.J. 1986. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
- [13] Ovsiannikov, L.V., 1982. *Group Analysis of Differential Equations*. Academic Press, New York.
- [14] Page, J.M. 1897. *Ordinary Differantial Equations An Elementary Text Book With in Introduction To Lie's Theory Of The Group Of One Parameter*. Macmillan And Co. Limited, London.
- [15] Bluman, G. W., Stephen C. A. 2002. *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*. No. 154, Springer, Verlag New York, Inc.
- [16] Hyden, P.E, 2000. *Symmetry Methods for Differential Equations (A Beginner's Guide)*. Cambridge Texts In Applied Mathematics.
- [17] Clarkson, P. A., Elizabeth, L. M. 1994. *Symmetry Reductions and Exact Solutions of a Class of Nonlinear Heat Equations*. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 70.3, 250-288.
- [18] Gbetoula, M.F.K. 2011. *Symmetry Analysis of Fisher's Equation*. University of KwaZulu-Natal, South Africa, 3-21.
- [19] Verna, A., Ram, J., Mehmet, K. 2014. *Analytic and Numerical Solutions of Nonlinear Diffusion Equations Via Symmetry Reductions*. *Advances in Difference Equations* (2014), (1-13).
- [20] Mohamed, Y.F. 2015. *Mathematical Modeling Of The Spread Of Hantavirus Infection*. Diss, Universiti Sains, Malaysia. Anthony Z. 1979. "Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed." *Bulletin of Mathematical Biology* 41.6 :835-840.
- [21] Kaushal, R. S., Ranjit K., and Awadhesh P. 2006. "On the exact solutions of nonlinear diffusion-reaction equations with quadratic and cubic nonlinearities." *Pramana* 67.2, 249-256.
- [22] Ablowitz, M. J., and Anthony Z. 1979. *Explicit Solutions of Fisher's Equation for a Special Wave Speed*. *Bulletin of Mathematical Biology*, 41.6 :835-840.
- [23] Kaushal, R. S., Ranjit, K., Awadhesh, P. 2006. *On the Exact Solutions of Nonlinear Diffusion-Reaction Equations with Quadratic and Cubic Nonlinearities*. *Pramana*, 67.2, 249-256.